

دکتر محرم نژاد ایردموسی  
عضو هیئت علمی  
دانشگاه شهید بهشتی

# پای تخته

## اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طبقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و با تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکته آخر اینکه در چند شماره اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به تدریج پر بارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

## بخش اول: مسئله‌ها

۲۰۵. مجموع ارقام عدد  $N = \frac{1^n + 2}{3}$  را بر حسب  $n$  به‌دست آورید ( $n \in \mathbb{N}$ ).

۲۰۶. همه سه‌تایی‌های  $(x, y, z)$  را بیابید، به‌طوری که:  
 $3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy + 2yz = 0$

۲۰۷. مجموع معکوسات چهار عدد طبیعی برابر است با  $1/85$ . مجموع این چهار عدد را به‌دست آورید.

۲۰۸. مساحت مثلثی را پیدا کنید که طول اضلاعش برابر ۵، ۶ و  $\sqrt{13}$  است.

۲۰۹. شیب خطی را پیدا کنید که از نقاط تقاطع دو منحنی  $y = 8 - x^2$  و  $y = x^2$  می‌گذرد.

۲۱۰. از میان اعداد ۱ تا ۲۱، پانزده عدد به تصادف برمی‌داریم. احتمال این پیشامد را بیابید که سه عدد پشت‌سرهم انتخاب شده باشند.

۲۰۱. حاصل ضرب چهار عدد طبیعی که دقیقاً سه‌تای آن‌ها فرد هستند، برابر ۷! و مجموع آن‌ها برابر است با ۶۳. بین آن‌ها بزرگ‌ترین عدد چه قدر است؟

۲۰۲. دایره C شامل نقاط  $(0, 6)$ ،  $(0, 10)$  و  $(8, 0)$  است. این دایره محور xها را در چه نقطه‌ای به‌جز  $(8, 0)$  قطع می‌کند؟

۲۰۳. شیب پاره‌خطی را بیابید که دو نقطه تقاطع منحنی‌های  $x^2 + y^2 = 36$  و  $2x + 3y = 6$  را به‌هم وصل می‌کنند.

۲۰۴. چند عدد طبیعی مضرب ۹ و کوچک‌تر از یک میلیون وجود دارد که ارقام آن یکسان باشد؟

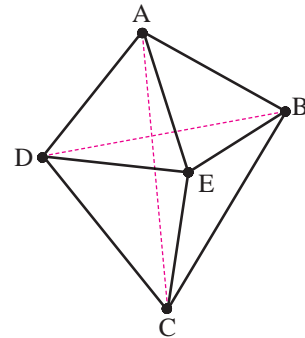
## بخش دوم: راه حل‌ها

۱۷۱. درون چهارضلعی محدب  $ABCD$ ، نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌هایش از رئوس، کمترین مقدار ممکن باشد.

$$EA+EC \geq AC, EB+ED \geq BD$$

$$\Rightarrow EA+EB+EC+ED \geq AC+BD$$

بنابراین کمترین مقدار مجموع فاصله‌ها از رئوس برابر است با مجموع طول دو قطر. اگر نقطه انتخابی نقطه تقاطع قطرها باشد، تساوی اتفاق می‌افتد.

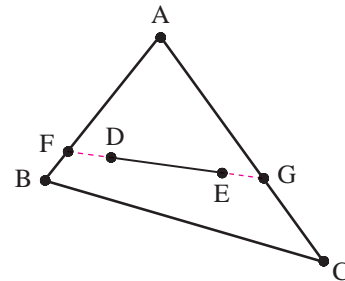


۱۷۲. ثابت کنید فاصله دو نقطه دلخواه درون هر مثلث از نصف محیط این مثلث بزرگ‌تر نیست.

$$DE \leq FG \leq AF+AG$$

$$DE \leq FG \leq FB+BC+CG$$

از دو نامساوی فوق نتیجه می‌شود که  $2DE$  از محیط مثلث بیشتر نیست و در نتیجه حکم خواسته شده برقرار است.



۱۷۳. دو بازیکن به نوبت سکه‌های هزارریالی (هم‌اندازه) را روی میزی گرد می‌گذارند، بی‌آنکه هیچ سکه‌ای روی دیگری قرار گیرد. بازیکنی که نتواند دیگر سکه‌ای روی میز

بگذارد بازنده است. چه کسی راهبرد برد دارد؟

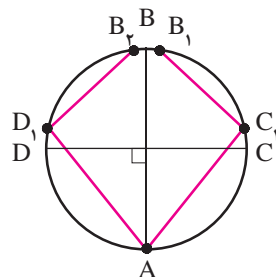
بازیکن اول راهبرد برد دارد. او سکه اول را در مرکز میز قرار می‌دهد و در حرکت‌های بعدی خود سکه را جایی قرار می‌دهد که قرینه سکه نفر دوم در حرکت قبلی باشد. با این راهبرد نفر اول همیشه می‌تواند سکه‌اش را روی میز قرار دهد.

۱۷۴. آیا درست است که در میان هر ۱۰ پاره خط همیشه ۳ پاره خط وجود دارند که می‌توان با آن‌ها یک مثلث رسم کرد؟

خیر. اگر طول ده پاره خط توان‌های  $2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$  باشند، هر سه تایی از آن‌ها را که انتخاب کنید، مانند  $2^k, 2^l, 2^m$  با شرط  $1 < k < l < m$ ، آن‌گاه  $2^k + 2^l < 2^m$  و در نتیجه نمی‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند.

۱۷۵. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی  $n \geq 3$ ، یک  $n$ ضلعی محدب وجود دارد که دقیقاً سه زاویه حاده دارد.

روی دایره  $C$  دو قطر متعامد  $AB$  و  $CD$  را رسم کنید. نقطه‌های  $C_1$  و  $D_1$  را نزدیک به  $C$  و  $D$  (مطابق شکل) در نظر بگیرید و به  $A$  وصل کنید. همچنین، دو نقطه  $B_1$  و  $B_2$  را نزدیک به  $B$  (مطابق شکل) و در دو طرف  $B$  انتخاب کنید. برای داشتن پنج‌ضلعی با شرایط مسئله،  $AD_1, B_1, B_2, C_1$  را در نظر بگیرید و برای  $n-5$  رأس دیگر به دلخواه روی کمان  $B_1, B_2$  اضافه کنید و به همراه نقاط  $A, D_1, B_1, B_2, C_1$  در نظر بگیرید. برای چهارضلعی و مثلث می‌توانید مثال‌هایی خاص ارائه کنید. برای مثال، مثلث متساوی‌الاضلاع و یک چهارضلعی با زوایای  $89^\circ, 89^\circ, 89^\circ$  و  $93^\circ$ .



**۱۷۸.** خانه‌های جدولی  $m \times n$  را با اعداد حقیقی طوری پر کرده‌ایم که مجموع اعداد هر سطر و همچنین مجموع اعداد هر ستون برابر با ۱ شده است. ثابت کنید:

$$m=n$$

مجموع کل اعداد جدول را اگر سطر به سطر جمع کنیم، برابر  $m$  و اگر ستون به ستون جمع کنیم برابر  $n$  خواهد شد. در نتیجه:  $m=n$ .

**۱۷۹.** ثابت کنید:  $4^{79} < 3^{100} + 3^{100} < 4^{80}$

$$2^{158} < 3^{100} + 3^{100} < 2^{160}$$

$$\Leftrightarrow 2^{158} - 3^{100} < 3^{100} < 2^{160} - 3^{100}$$

اگر ثابت شود:  $2^{159} < 3^{100} < 2^{158}$ ، آن‌گاه نامساوی فوق ثابت می‌شود. اگر از طرفین نامساوی لگاریتم بگیریم، باید نشان دهیم:  $\log_2 3 < 1/59 < 1/58$ . به کمک ماشین حساب یا رایانه مقدار لگاریتم فوق برابر با  $1/5849$  به دست می‌آید.

**۱۸۰.** کدام عدد بزرگ‌تر است:

$$123456789 \times 123456781 \text{ یا } 123456785^2$$

با فرض  $a = 123456785$  خواهیم داشت:

$$123456789 \times 123456781 = (a+4)(a-4)$$

$$= a^2 - 16 < a^2 = 123456785^2$$

**۱۷۶.** ثابت کنید نمی‌توان پنج خط راست در صفحه رسم کرد، به طوری که دقیقاً سه نقطه تقاطع داشته باشند.

متناظر با هر خط راست یک رأس برای گراف  $G$  در نظر بگیرید و دو رأس را به هم وصل کنید، هرگاه خطوط متناظر آن‌ها متقاطع باشند. بنابراین گرافی باید ایجاد شود با پنج رأس که ۳- منتظم باشد. اما می‌دانیم چنین گرافی وجود ندارد (چون مجموع درجات هر گراف عددی زوج است).

**۱۷۷.** ثابت کنید  $1 + 2^{2^{1294}}$  بر  $3^{1295}$  بخش پذیر است.

حکم کلی‌تری را با استقرا ثابت می‌کنیم: برای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت می‌کنیم  $1 + 2^{2^n}$  بر  $3^{n+1}$  بخش پذیر است. برای  $n=1$ ، عدد ۹ بر ۹ بخش پذیر است. فرض کنید حکم برای  $n=k$  برقرار باشد. در این صورت:

$$2^{2^{k+1}} + 1 = (2^{2^k})^2 + 1 = (2^{2^k} + 1)(2^{2^k} - 1) + 1$$

$(2^{2^k} + 1)$  طبق فرض بر  $3^{k+1}$  بخش پذیر است.

همچنین:

$$2^{2^k} - 1 \equiv (-1)^{2^k} - (-1)^{2^m} + 1 \equiv (-1)^{2^k} - (-1)^{2^k} + 1 \equiv 3 \equiv 0$$

در نتیجه حاصل ضرب فوق بر  $3^{k+2}$  بخش پذیر

است.

۶. در شکل زیر با هر حرکت، دایره سفید، چهار گوشه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، و دایره سیاه دو گوشه در همان جهت حرکت می‌کند. بعد از چند حرکت آن‌ها در یک گوشه خواهند بود؟

تشریح اندیشه!



## پرسش‌های پیکار جو!



$x$  و  $y$  را عددهایی مثبت و  $S$  را کوچک‌ترین عدد از بین عددهای  $x$  و  $y + \frac{1}{x}$  فرض می‌کنیم. حداکثر مقدار  $S$  کدام است؟

- (الف) ۲ (ب)  $2 + \sqrt{2}$  (ج)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (د)  $\sqrt{2}$  (ه) ۱